پروژه سوم:

حل معادله موج و گرما با استفاده از توابع متلب :

معادله دیفرانسیل پاره ای یک بعدی و شرایط مرزی و شرایط اولیه برای توزیع حرارتی در یک میله فلزی به صورت زیر می باشد. با استفاده از روش تفاضل محدود می خواهیم برنامه ای بنویسیم که تعداد نقاط را از کاربر دریافت کرده و در این نقاط مقدار حرارتی که ایجاد می شود را محاسبه کند. مقدار پارامتر B معرف گرمای ابتدای میله در فاصله زمانی بین ۰ تا a و C حرارت میله در لحظه صفر و A تغییرات گرمای میله با توجه به تغییرات مکانی در انتهای میله را نشان می دهد که توسط برنامه از کاربر خواسته می شود. همچنین مقدار α نیز توسط کاربرداده می شود. می خواهیم برنامه ای بنویسیم که با اعمال مقادیر مختلف بتوان حرارت را در نقاط خواسته شده به راحتی به دست آورد.

نتیجه:

این برنامه این نیز حل معادله موج و گرما در حالت کلی است که اینجا حالت خاصی از این دست معادلات می باشد که به معادله حرارت (گرما) معروف است و با این پیش فرض ها در حالت کلی فرض های ابتدایی زیر را برای نوشتن کد متلب برنامه در نظر می گیریم:

$$c(\mathrm{x,t,u},\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial u}{\partial t}=x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{x}^{m}\mathrm{f}(\mathrm{x,t,u},\frac{\partial u}{\partial x}))+\mathrm{s}(\mathrm{x,t,u},\frac{\partial u}{\partial x})$$

که این معادله حالت کلی دارد و می توان با مقداردهی به مقادیری چون m,c,s,f می توان معادلات خاص را به دست آورد و در اینجا با توجه به معادله ای که ما داریم این مقادیر عبارتند از:

$$\begin{cases} c=\dfrac{1}{\alpha} \\ f=DuDx \\ s=0 \end{cases}$$

حال شرایط مرزی و اولیه رادر حالت کلی مشاهده می کنیم:

$$\begin{cases} initial: u(\mathrm{x},\mathrm{t}_0)=\mathrm{u}_0(\mathrm{x}) \\ boundary\,(\mathrm{l}\rightarrow \text{Primary } mesh): p(\mathrm{x}_l,\mathrm{t,u})+\mathrm{q}(\mathrm{x}_l,\mathrm{t})\,\mathrm{f}(\mathrm{x}_l,\mathrm{t,u},\frac{\partial u}{\partial x})=0 \\ boundary\,(\mathrm{r}\rightarrow \text{Terminal } mesh): p(\mathrm{x}_r,\mathrm{t,u})+\mathrm{q}(\mathrm{x}_r,\mathrm{t})\,\mathrm{f}(\mathrm{x}_r,\mathrm{t,u},\frac{\partial u}{\partial x})=0 \end{cases}$$

که در این مثال داریم:

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ p_l = u_l - B, q_l = 0 \\ p_r = A, q_r = 1 \\ u_0(\mathrm{x}) = \mathrm{C} \end{cases}$$

لذا با استفاده از برنامه زیر و دادن مقادیر ورودی خواسته شده توسط مسئله دماهای مختلف در نقاط مختلف در زمان های مختلف محاسبه می شود.

تابع pdex11pde

```
function [c,f,s] = pdex11pde(x,t,u,DuDx)
global alfa;
c = 1/alfa;
f = DuDx;
s = 0;
```

تابع pdex11ic

```
function u0 = pdex11ic(x)
u0=1;
```

تابع pdex11bc

```
function [pl,ql,pr,qr] = pdex1bc(xl,ul,xr,ur,t)
global A B;
pl = ul-B;
ql = 0;
pr = A;
qr = 1;
```

و در نهایت تابع اصلی pdex11

که برنامه را با توابع گفته شده اجرا می کند.(برای مقدار حرارت در لحظه $t = 2$ یا همان مقدار C در زیربرنامه pdex11ic مقدار $u0$ را برابر با تابعی بر حسب x قرار می دهیم و با مقداردهی بقیه مقادیر چون $A, B, L, a, n, alfa$ تابع دمای نقاط مختلف را در زمان های مختلف نشان می دهد)

```
function pdex11

global alfa B A L ;
m = 0;
A=input('please Enter value of Temperature changes due to
shift rod(A)=');
B=input('please Enter value of Heat the top bar(B)=');
alfa=input('please Enter value of alfa=');
```

```
L=input('please Enter value of rod length(L)=');
a=input('please Enter value of a=');
n=input('please Enter value of points(n)=');
x = linspace(0,L,n);
t = linspace(0,a,5);
sol = pdepe(m,@pdex11pde,@pdex11ic,@pdex11bc,x,t);
% Extract the first solution component as u.
u = sol(:,:,1);

% A surface plot is often a good way to study a solution.
surf(x,t,u)
title('Numerical solution computed with 20 mesh points.')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')

% A solution profile can also be illuminating.
figure
plot(x,u(end,:))
title('Solution at t = 2')
xlabel('Distance x')
ylabel('u(x,2)')
```

که با فرض مقادیر زیر مقادیر دما در زمان ها و نقاط مختلف بدین ترتیب به دست می آیند:

$$A = 10$$
$$B = 5$$
$$C = \frac{2x}{1+x^2}$$
$$alfa = \alpha = 0.1$$
$$L = 1$$
$$n = 20$$
$$a = 2$$

نتجه اجرای برنامه چنین است:

u =

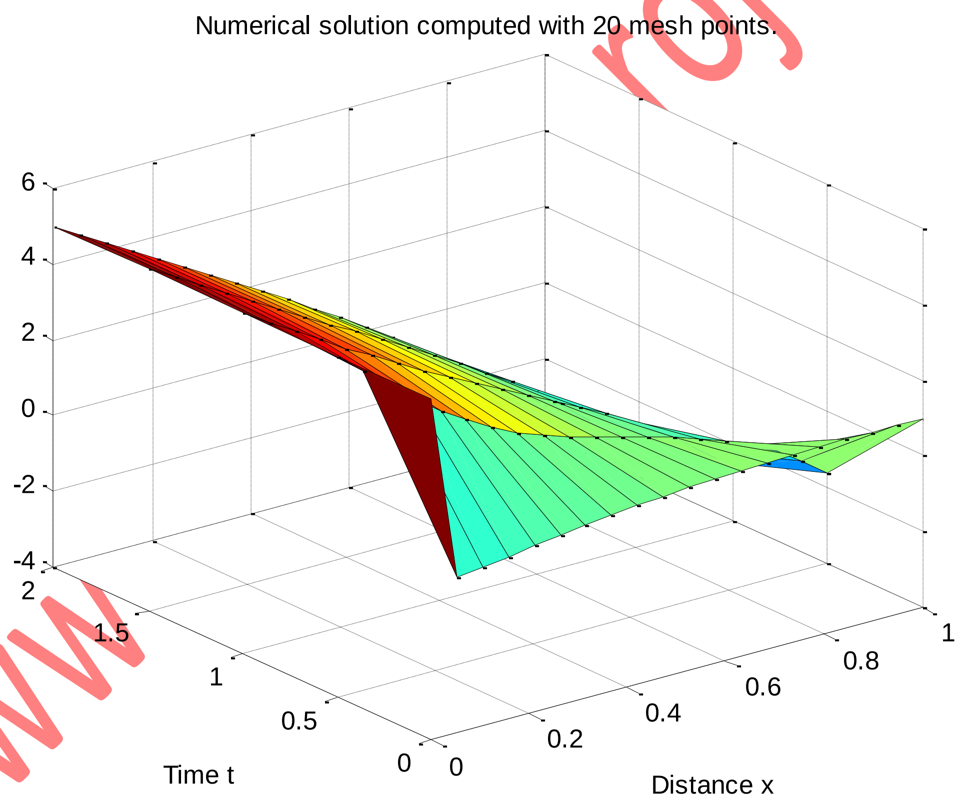
Columns 1 through 13

5.0000	0.1050	0.2082	0.3081	0.4032	0.4922	0.5743	0.6488	0.7153	0.7738	0.8243	0.8672	0.9030
5.0000	4.4199	3.8566	3.3254	2.8384	2.4040	2.0262	1.7041	1.4327	1.2035	1.0051	0.8243	0.6469
5.0000	4.5750	4.1538	3.7398	3.3358	2.9440	2.5651	2.1990	1.8443	1.4984	1.1578	0.8180	0.4740
5.0000	4.6078	4.2162	3.8255	3.4360	3.0477	2.6603	2.2732	1.8852	1.4951	1.1013	0.7016	0.2941
5.0000	4.6068	4.2132	3.8187	3.4228	3.0249	2.6244	2.2204	1.8123	1.3989	0.9792	0.5523	0.1170

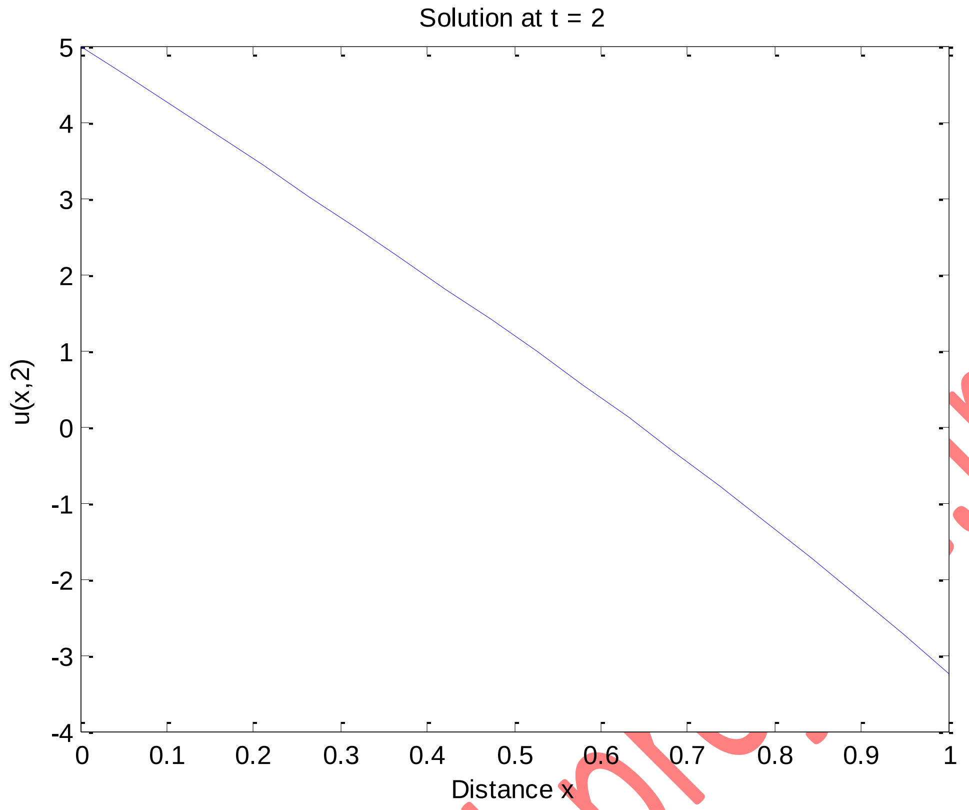
Columns 14 through 20

0.9321	0.9551	0.9727	0.9854	0.9938	0.9985	1.0000
0.4585	0.2452	-0.0057	-0.3053	-0.6629	-1.0852	-1.5764
0.1203	-0.2485	-0.6377	-1.0519	-1.4952	-1.9704	-2.4795
-0.1235	-0.5532	-0.9973	-1.4576	-1.9355	-2.4324	-2.9488
-0.3278	-0.7831	-1.2498	-1.7288	-2.2209	-2.7264	-3.2458

که برای فهم بهتر دو شکل که تعادل گرمایی را در لحظه $t = 2$ رسم شده است.



The surface plot shows the behavior of the solution



The following plot shows the solution profile at the final value of t (i.e., t = (2